Особенности при решении задач

на составление уравнений

преподаватель математики

ГБПОУ МО "Колледж "Подмосковье"

Будянская Анна Валерьевна

Задачи на составление уравнений (или текстовые задачи) часто встречаются на вступительных экзаменах в вузы. Это объясняется тем, что абитуриент, хорошо справляющийся с этими задачами, демонстрирует не только знание математики, но и умение ее применять, т.е. умение формализовывать (“переводить на математический язык”) условие задачи, что очень ценно для будущего специалиста. Разберем некоторые приёмы решения этих задач.

Начинают решение задачи обычно с выбора тех неизвестных величин, для которых потом будут составляться уравнения. Необязательно брать в качестве таких неизвестных те величины, которые требуется определить в задаче. Иногда удобнее найти другие величины: те, для которых сравнительно легко составляются уравнения (или уравнения имеют простой вид) и через которые несложно выражаются искомые величины. Если составленных уравнений получается меньше, чем неизвестных, то следует внимательно посмотреть, все ли условия задачи учтены при составлении уравнений или не введены ли лишние неизвестные (впрочем, бывают задачи, в которых все рассматриваемые величины найти невозможно, а те, которые требуется найти, – возможно). Часто неизвестные данной задачи имеют естественные ограничения: например, если x – масса какого-либо вещества, то x – неотрицательное число; если x – количество человек, то x – целое неотрицательное число; если x – цифра числа (количество единиц, десятков, сотен…), то x может принимать лишь следующие значения $0, 1, 2, \dots, 9.$ и т.д.

Пример 1. *Товар продавался в течение двух дней: в первый день по цене 20 руб за 1 кг, а во второй – 90. Какая часть общей выручки была получена за товар в первый день, если средняя цена товара оказалась равной 60 руб за 1 кг?*

Решение. Пусть x кг товара было продано в первый день, а y кг – во второй. Тогда выручка за первый день составила $20x$ рублей, а за второй –

$90y$ рублей. Средняя цена товара за оба дня равна $\frac{20x+90y}{x+y}$. По условию средняя цена равна 60. Следовательно, мы имеем уравнение $\frac{20x+90y}{x+y}=60.$ Отсюда получаем: $20x+90y=60x+60y,$ или $4x=3y.$ Доля выручки за первый день равна $\frac{20x}{20x+90y}=\frac{5\cdot 4x}{5\cdot 4x+90y}=\frac{5\cdot 3y}{5\cdot 3y+90y}=\frac{15}{105}=\frac{1}{7}$. **Ответ:** $\frac{1}{7}$.

Пример 2. *Если двузначное число разделить на произведение его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 9. Если же из квадрата суммы цифр этого числа вычесть произведение его цифр, то получится данное число. Найти это число.*

Решение. Пусть x – число десятков, а y – число единиц. Тогда искомое число равно $10x+y$. Из условия задачи мы получаем систему уравнений: $\begin{cases}10x+y=3xy+9,\\ 10x+y=(x+y)^2-xy.\end{cases}$ Отсюда получаем: $3xy+9=x^2+y^2+xy;$ $(x-y)^2=9;$ $x-y=\pm 3.$ Разберем отдельно два случая.

1-й случай: $x-y=3.$ Тогда $y=x-3.$ Имеем: $10x+(x-3)=3x(x-3)+9;$ $3x^2-20x+12=0;$ $x_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-3\cdot 12}}{3};$ $x_1=6,$ $x_2=2/3.$ Второе значение не подходит, т.к. x должно быть целым числом. Следовательно, $x=6.$ Отсюда $y=3.$

2-й случай: $x-y=-3.$ Тогда $y=x+3,$ и мы получаем: $10x+(x+3)=3x(x+3)+9;$ $3x^2-2x+6=0.$ Дискриминант этого квадратного уравнения меньше 0, поэтому решений у него нет.

Таким образом, мы получаем, что исходное число равно 63.

Задачи на движение и работу

Методика решения задач этого типа одинакова для задач на движение, на наполнение объемов и на выполнение работы. В задачах на движение мы имеем уравнение $S=vt$, где S - путь, пройденный телом со скоростью v за время t. При наполнении или опорожнении объемов в этой формуле S –

объем жидкости, втекающей в резервуар или вытекающей из него за время t*,* $v-$ *объём жидкости, поступающей в единицу времени (т.е. производительность насоса, трубы). При выполнении работы в формуле* $S=vt$ S *обозначает выполненную работу,* $t-$ *время,* $v-$ *производительность труда, т.е. скорость выполнения работы.*

Для получения полной системы уравнений, описывающей данный процесс, составляют уравнения «движения» во всех описанных ситуациях для каждого участника. К ним добавляются уравнения связи или другие соотношения в соответствии с условиями задачи.

При решении задач на движение полезно составить иллюстративный чертеж, т.е. изобразить каждую из описанных в условии ситуаций на схеме, указав направления движения и скорости участников, а также отметив пройденные ими расстояния. Это поможет составить уравнения.

Пример 3. Поезд был задержан ввиду неисправности пути на 10 мин, а затем на расстоянии 75 км наверстал потерянное время, развив скорость на 15 км/ч больше предполагаемой по расписанию. Определить скорость поезда, с которой он двигался после задержки.

Решение. Пусть x *км/ч – скорость поезда, с которой он двигался после задержки, тогда* $(x-15)$ *км/ч – скорость, предполагаемая по расписанию;* $\frac{75}{x}$ *час – время, за которое поезд прошел 75 км, а* $\frac{75}{x-15}$ *час – время, за которое он должен был пройти это расстояние. Тогда на* $\left(\frac{75}{x-15}-\frac{75}{x}\right)$ *час поезд был задержан ввиду неисправности пути, т .е., по условию задачи, на* $\frac{1}{6}$ *часа* $\left(10\text{мин}=\frac{1}{6}\text{часа}\right)$*. Значит,* $\frac{75}{x-15}-\frac{75}{x}=\frac{1}{6}$*. Преобразуя последнее уравнение, получим* $x^2-15x-6750=0$*, откуда* $x=90$ *или* $x=-75$*. По смыслу задачи* $x>15$*, этому условию удовлетворяет* $x=90$*. Значит, 90 км/ч - скорость поезда, с которой он двигался после задержки.*

Пример 4. Рукопись в 120 страниц отдана двум машинисткам. Если первая машинистка начнет печатать через час после второй, то каждая из них напечатает по половине рукописи. Если же обе машинистки начнут работать одновременно, то через 4 часа останутся ненапечатанными 32 страницы. За какое время может перепечатать рукопись каждая машинистка в отдельности?

Решение. Пусть x *страниц в час печатает первая, а* y *страниц в час – вторая машинистка. Первой машинистке, чтобы напечатать половину рукописи, требуется* $\frac{60}{x}$ *час, а второй -* $\frac{60}{y}$ *час, или на 1 час больше. Значит,* $\frac{60}{y}-\frac{60}{x}=1$. *Работая вместе, обе машинистки за 4 часа напечатают* $(x+y)\cdot 4$ *страниц, что равно* $(120-32)$ *страницам. Значит,* $(x+y)\cdot 4=120-32$. *Составим и решим систему уравнений:* $\begin{cases}(x+y)\cdot 4=88,\\ \frac{60}{y}-\frac{60}{x}=1.\end{cases}$ *Выразим из первого уравнения* $x=22-y$ *и подставим во второе. Тогда* $\frac{60}{y}-\frac{60}{22-y}=1$ *или* $y^2-142y+1320=0$. *Откуда* $y=10$ *или* $y=132$. *По смыслу задачи* $y<120$, *этому условию удовлетворяет* $y=10$, *а* $x=12$. *Значит, за 120:12=10 (час) перепечатает всю рукопись первая машинистка, а вторая за 120:10= 12 (час).*

Пример 5. Четыре одинаковых насоса, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 часов. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 часов. За сколько часов три насоса могут наполнить первый танкер?

Решение. Пусть V_1 *и* V_2 $м^3$ *- объемы первого и второго танкеров, а* v $м^3/час$ *- производительность насосов. При совместной работе насосов их общая производительность будет* $4v$ $м^3/час$. *Уравнение, соответствующее условию задачи о наполнении первого танкера и третьей части второго за*

11 часов, будет иметь вид $\dfrac{V_1+\frac{1}{3}V_2}{4v}=11,$ *или* $\dfrac{1}{4}\dfrac{V_1}{v}+\dfrac{1}{12}\dfrac{V_2}{v}=11$ *(1). Из второго условия задачи (о наполнении за 18 часов) получим уравнение:* $\dfrac{V_1}{3v}+\dfrac{\frac{1}{4}V_2}{v}=18.$ *Или* $\dfrac{1}{3}\dfrac{V_1}{v}+\dfrac{1}{4}\dfrac{V_2}{v}=18$ *(2). Время наполнения тремя насосами второго танкера равно* $\dfrac{V_2}{3v}$. *Из уравнения (1) выразим* $\dfrac{V_1}{v}=44-\dfrac{1}{3}\dfrac{V_2}{v}$. *Подставляя* $\dfrac{V_1}{v}$ *в (2), получим* $\dfrac{1}{3}\left(44-\dfrac{1}{3}\dfrac{V_2}{v}\right)+\dfrac{1}{4}\dfrac{V_2}{v}=18$ *или* $\dfrac{V_2}{v}=24$ *и* $t=\dfrac{V_2}{3v}=8$. *Искомое время – 8 часов.*

Пример 6. Пароход вышел из пункта A в пункт B, расположенный ниже по течению реки, и, дойдя до пункта B, сразу же повернул обратно, затратив на весь путь 5 часов. Сколько времени идет пароход от п. B до п. A, если известно, что плоты сплавляются от A до B за 12 часов?

Решение. Пусть x *км/ч – собственная скорость парохода, а* y *км/ч – скорость течения. Тогда* $(x+y)$ *км/ч скорость парохода на пути из* A *в* B, *а* $(x-y)$ *км/ч – скорость парохода на пути из* B *в* A. *Скорость плотов равна* y *км/ч. Обозначим через* S *км расстояние между* A *до* B. *Из условия задачи получаем систему уравнений:* $\begin{cases}\dfrac{S}{x+y}+\dfrac{S}{x-y}=5,\\ 5=12y.\end{cases}$ *Из первого уравнения* $\dfrac{25x}{x^2-y^2}=5.$

Так как $S=12y$, *то* $24xy=5\left(x^2-y^2\right),$ $5x^2-24xy-5y^2=0$. *Это равенство можно рассматривать как квадратное уравнение относительно переменной* x. *Его дискриминант* $D=(-24y)^2-4\cdot5\left(-5y^2\right)=4y^2(144+25)=169\cdot4y^2=(26y)^2$. *Отсюда* $x_{1,2}=\dfrac{24y\pm26y}{10};x=-0,2y,$ *или* $x=5y$. *По смыслу задачи* $x>0,$ *поэтому условию задачи удовлетворяет* $x=5y$. *Требуется найти время, затраченное пароходом на путь от* B *до* A, *т.е.* $t=\dfrac{S}{x-y}$. *Имеем* $t=\dfrac{S}{5y-y}=\dfrac{S}{4y}=\dfrac{12y}{4y}=3$.

Искомое время равно 3 часам.

При равномерном движении тел, находящихся первоначально на расстоянии S, навстречу друг другу или в одну сторону со скоростями v_1 и v_2 для вычисления времени встречи используются формулы: а) $t=\dfrac{S}{v_1+v_2}$ - при движении тел навстречу; б) $t=\dfrac{S}{v_1-v_2}$ - при движении в одну сторону при $v_1>v_2$. Первая формула применяется и в задачах на совместное выполнение работы несколькими участниками или наполнении (опорожнении) объемов. Такие же формулы справедливы для движения тел по окружности.

Пример 7. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. Скорость каждого постоянна, и на пробег всей дорожки один из них тратит на 5 сек меньше другого. Если они начинают с общего старта одновременно и в одном направлении, то окажутся рядом через 30 сек. Через какое время они встретятся, если побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях?

Решение. Пусть v_1 и v_2 - скорости спортсменов (для определенности будем считать, что $v_1>v_2$). Пусть S - длина дорожки. Тогда первый пробегает её за $\dfrac{S}{v_1}$ сек, а второй – за $\dfrac{S}{v_2}$ сек, или на 5 сек медленнее. Получаем уравнение $5=\dfrac{S}{v_2}-\dfrac{S}{v_1}$. Так как при движении с общего старта одновременно в одном направлении они оказываются рядом через 30 сек, то имеем уравнение $S=30(v_1-v_2)$. Получаем систему двух уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases}5=\dfrac{S}{v_2}-\dfrac{S}{v_1},\\ S=30(v_1-v_2);\end{cases}$ $\begin{cases}5=\dfrac{S}{v_2}-\dfrac{S}{v_1},\\ \dfrac{v_1}{S}-\dfrac{v_2}{S}=\dfrac{1}{30}.\end{cases}$ Найдем время, через которое спортсмены встретятся. Из вышесказанного $t=\dfrac{S}{v_1+v_2}=\dfrac{1}{\frac{v_1}{S}+\frac{v_2}{S}}$. Ведем *обозначение* $p_1 = \frac{v_1}{S}$ *и* $p_2 = \frac{v_2}{S}$. *Тогда получим* $\begin{cases} \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_1} = 5, \\ p_1 - p_2 = \frac{1}{30}. \end{cases}$ *Отсюда* $p_1 = p_2 + \frac{1}{30}$

и $150p_1^2 - 5p_1 - 1 = 0$. *Корнями являются* $p_1 = \frac{1}{10}$ *и* $p_1 = -\frac{1}{15}$ *(второй корень не подходит, т.к. должно быть* $p_1 > 0$*). Отсюда* $p_2 = \frac{1}{10} - \frac{1}{30} = \frac{1}{15}$.

Следовательно, время встречи равно $t = \frac{1}{p_1 + p_2} = 6$ *сек.*

Задачи на концентрацию и процентные соотношения

Пусть даны различные вещества $A_1, A_2, ..., A_k$ *с массами* $M_{A_1}, M_{A_2}, ..., M_{A_k}$. *Тогда масса смеси, составленной из них, равна* $M = M_{A_1} + M_{A_2} + ... + M_{A_k}$. Массовой концентрацией *вещества* A_i $(i = 1, ..., k)$ *в смеси называется величина* C_{A_i}, *выражаемая формулой:* $C_{A_i} = \frac{M_{A_i}}{M}$. *При этом верно равенство* $C_{A_1} + C_{A_2} + ... + C_{A_k} = 1$.

Аналогично определяются объемные концентрации *веществ в смеси, только вместо масс в формулах используются объемы компонент* $V_{A_1}, V_{A_2}, ..., V_{A_k}$. *Полагается, что получающаяся смесь однородна и ее объем равен сумме объемов компонент.*

Процентным содержанием *веществ* $A_1, A_2, ..., A_k$ *в данной смеси называются величины* $p_{A_1}\%, ..., p_{A_k}\%$, *вычисляемые по формуле* $p_{A_i}\% = C_{A_i} \cdot 100\%$. Процентом *какого – либо числа называется сотая часть этого числа, поэтому в задачах от процентов можно освобождаться, переходя к дробям. Например, тот факт, что* B *составляет 27% от* A, *записывается в виде* $B = 0{,}27 \cdot A$.

При решении задач на концентрацию и проценты, а это обычно задачи на смеси, растворы и сплавы, в качестве неизвестных, как правило, выбираются либо весь вес (объем) компоненты, либо ее концентрация в смеси.

В задачах на процентный прирост используются следующие понятия и формулы. Пусть некоторая переменная величина A, меняющаяся со временем, имеет в начальный момент значение A_0, а через известный промежуток времени t_1 значение A_1.

Абсолютным приростом величины A за время t_1 *называется разность* $A_1 - A_0$, относительным приростом величины A за время t_1 *называется величина* $\frac{A_1 - A_0}{A_0} \cdot 100\%$. *Обозначая процентный прирост величины* A *через* $p\%$*, получаем формулу, выражающую* A_1 *через* A_0 *и* p: $A_1 = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Удобно ввести величину $\lambda = 1 + \frac{p}{100}$; *тогда увеличение какой-либо величины на* p% *равносильно увеличению ее в* λ *раз. Если величина* A *и далее через равные промежутки времени имеет процентный прирост* $p\%$, *то в момент времени* $t_n = nt_1$ *ее значение* A_n *будет равно:* $A_n = A_{n-1} \cdot \lambda = A_{n-2} \cdot \lambda \cdot \lambda = \ldots = A_0 \cdot \lambda^n$.

Если же известно, что величина A *в течение времени* t_1 *имеет процентный прирост* $p_1\%$ *(за единицу времени), на следующем этапе в течение времени* $t_2 - t_1$ *– прирост* $p_2\%$, *далее в течение времени* $t_3 - t_2$ *- прирост* $p_3\%$ *и т.д., то в момент времени* t_n *значение* A_n *будет равно*

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^{t_1} \left(1 + \frac{p_2}{100}\right)^{t_2 - t_1} \left(1 + \frac{p_3}{100}\right)^{t_3 - t_2} \ldots\ldots \left(1 + \frac{p_n}{100}\right)^{t_n - t_{n-1}}.$$

Пример 8. Из сосуда, содержащего 8 л водного раствора кислоты, отлили 1 л раствора и влили в сосуд 1 л воды. Затем отлили 1 л полученного раствора и влили 2 л воды. В результате этого концентрация кислоты стала равной 12,25% . Какова была первоначальная концентрация кислоты в растворе?

Решение. Пусть концентрация кислоты в сосуде была $x\%$. *Тогда в 8 л раствора было 0,08* x *л кислоты, в 1 л раствора – 0,01* x *л кислоты. После того,* *как из раствора отлили 1 л и долили 1 л воды, в 8 л раствора стало* $0,08x-0,01x=0,07x$ *л кислоты. Тогда в 1 л нового раствора стало* $\frac{0,07x}{8}$ *л кислоты. В 11 л последнего раствора стало* $0,07x-\frac{0,07x}{8}=\frac{0,49x}{8}$ *литров кислоты, ее концентрация составила* $\frac{0,49x}{8\cdot 10}\cdot 100\%,$ *что по условию равно 12,25%. Получаем уравнение:* $\frac{0,49x}{8\cdot 10}=12,25,\quad x=20.$ *Значит, первоначальная концентрация кислоты в сосуде была равна 20%.*

Пример 9. Руководство промышленного предприятия наметило за два года увеличение объема продукции в четыре раза. Каким (в процентах) должен быть ежегодный прирост продукции в предположении, что он одинаков для каждого года?

Решение. Пусть ежегодный прирост продукции составляет $x\%$, A - первоначальный объем. Положим $\lambda=1+\frac{x}{100}$.Тогда к концу первого года объем продукции составит $A+A\cdot\frac{x}{100}=A\left(1+\frac{x}{100}\right)=\lambda A,$ к концу второго – $\lambda^2 A.$ По условию $\lambda^2 A=4A.$ Отсюда $\lambda=2.$ Следовательно, $1+\frac{x}{100}=2,$ а значит, $x=100$. Таким образом, ежегодный прирост продукции должен составлять 100%.

Пример 10. На деньги, размещенные в трех банках, за год начисляется определенный процент, свой для каждого банка. Если $1/5$ некоторой суммы положить в первый банк, а оставшуюся - во второй банк, то через год сумма вкладов превысит исходную на 106%. Если же $1/4$ суммы положить в первый банк, а остальные деньги - во второй банк, то через год сумма вкладов будет такой же, как и при размещении $1/2$ исходной суммы во втором банке, а остальных денег – в третьем банке. Наконец, при размещении всей суммы во втором банке через год вклад станет на 5% больше, чем сумма вкладов в первом, втором и третьем банках, если разместить в них деньги в равных долях. Найти процент, начисляемый на вклады во втором банке.

Решение. Пусть p_1, p_2, p_3 - проценты, начисляемые в первом, втором и третьем банках соответственно, а А – исходная сумма. Положим $\lambda_1 = 1 + \frac{p_1}{100}$, $\lambda_2 = 1 + \frac{p_2}{100}$, $\lambda_3 = 1 + \frac{p_3}{100}$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{5} A \cdot \lambda_1 + \frac{4}{5} A \cdot \lambda_2 = 2,06A, \\ \frac{1}{4} A \cdot \lambda_1 + \frac{3}{4} A \cdot \lambda_2 = \frac{1}{2} A \cdot \lambda_2 + \frac{1}{2} A \cdot \lambda_3, \\ A \cdot \lambda_2 = \frac{1,05}{3} \left(A \cdot \lambda_1 + A \cdot \lambda_2 + A \cdot \lambda_3 \right). \end{cases}$$

Сокращая в системе на A и умножая уравнения на 5, 4, 3 соответственно, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 = 10,3, \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = 2\lambda_2 + 2\lambda_3, \\ 0,65\lambda_2 = 0,35\lambda_1 + 0,35\lambda_3. \end{cases}$$

Решив ее, получим: $\lambda_1 = 1,9,$ $\lambda_2 = 2,1,$ $\lambda_3 = 2.$

Следовательно, $1 + \frac{p_2}{100} = 2,1,$ откуда $p_2 = 110\%.$

Литература

1. Алгебра и начало анализа. Учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений./ *А.Н. Колмогоров, А.М.Абрамов, Ю.П.Дудницын* и др.; Под ред. А.Н.Колмогорова. – М.: Просвещение, 2002. – 384 с.

2. *Бардушкин В.В., Блинкова Н.А., Кожухов И.Б.* и др. Сборник заданий по элементарной математике в 2 томах. Том 1. Задачи с ответами по арифметике, тригонометрии, геометрии, алгебре и началам анализа./ Под ред. *А.М. Ревякина.* - М.: МГАДА, 2009.- 354 с.

3. *Бардушкин В.В., Блинкова Н.А., Кожухов И.Б.* Сборник заданий по элементарной математике в 2 томах. Том 2. Тестовые и контрольные задания для слушателей ДПО, студентов колледжа, учащихся подготовительных курсов и абитуриентов. / Под ред. *А.М. Ревякина.* - М.: МГАДА, 2009.- 249 с.

4. *Кожухов И.Б., Прокофьев А.А. Математика.* Готовимся без репетитора. Задачи и решения, 304 с. М., Махаон, 2006.
5. *Ивлев Б.М., Саакян С.М., Шварцбурд С.И.* Дидактические материалы по алгебре и началам анализа: пособие для 10 класса. - М.: Просвещение 1997.
6. *Ивлев Б.М., Саакян С.М., Шварцбурд Р.И.* Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса. - М.: Просвещение, 1995.
7. *Саакян СМ., Гольдман А.М., Денисов Д.В.* Задачи по алгебре и началам анализа. Пособие для учащихся 10-11 классов. - М.: Просвещение, 1997.
8. *Виленкин Н.Я., Шибасов Л.П., Шибасова З.Ф.* За страницами учебника математики. Арифметика. Алгебра. Геометрия: книга для учащихся 10-11 классов. -М.: Просвещение 1996.
9. *Лисовец Ю.П., Ревякин А.М.* Готовимся к выпускному экзамену. Экзаменационные билеты по математике. М.: Аквариум, 2000 - 272 с.
10. *Бардушкин В.В., Кожухов И.Б., Прокофьев А.А, Ревякин А.М., Терещенко А.М.* Письменный вступительный экзамен по математике. Серия "Как дать экзамены". М.: Лист, 1998. - 288 с.